MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 1
25.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Wir haben als mögliche sprachliche Formulierungen
   - $P \wedge Q$: Clara liest ein Buch und hört dabei Musik.
   - $P \vee Q$: Clara liest ein Buch oder hört Musik, oder beides.
   - $P \Longrightarrow Q$: Wenn Clara ein Buch liest, dann hört sie dabei Musik.
   - $P \Longleftrightarrow Q$: Clara liest genau dann ein Buch, wenn sie Musik hört.

   b) Wir verneinen die Aussagen formal und sprachlich und geben verschiedene äquivalente Möglichkeiten dafür an.
   - $\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$: Clara liest nicht ein Buch und hört dabei Musik. Oder: Clara liest kein Buch oder hört keine Musik.
   - $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$: Clara liest weder ein Buch noch hört sie Musik. Oder: Clara liest kein Buch und hört auch keine Musik.
   - $\neg(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow P \wedge \neg Q$: Clara liest ein Buch, aber hört keine Musik dabei.
   - $\neg(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$: Clara liest entweder ein Buch oder sie hört Musik (nicht beides zugleich).

2. a) Wir stellen folgende Wahrheitstafel auf:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

   Die Aussagen sind nicht äquivalent, denn in der 4. und 5. Zeile ergeben sich abweichende Wahrheitswerte.

   b) Teile der Wahrheitstafel von oben können wir wieder verwenden:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

   Somit sind die Aussagen $P \vee (Q \wedge R)$ und $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ tatsächlich äquivalent.

c) In diesem Fall ergibt sich als Wahrheitstafel:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Damit ist bewiesen, daß $P \wedge (Q \vee R)$ und $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ äquivalente Aussagen sind.

d) Wir stellen die bereits gewonnenen Wahrheitstafeln neu zusammen und erhalten:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Wieder sehen wir, daß die Aussagen nicht äquivalent sind.
Dies wäre im brigen auch ohne Wahrheitstafel schon klar gewesen, denn aus den vorhergehenden Teilaufgaben wissen wir, daß

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Longleftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

und

$$(P \vee (Q \wedge R)) \Longleftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)),$$

aber daß

$$\neg\Big((P \vee (Q \wedge R)) \Longleftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))\Big)$$

gilt. Man schreibt dafür auch

$$(P \vee (Q \wedge R)) \not\Longleftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)).$$

Durch Kombination dieser drei Aussagen folgt sofort, daß

$$((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \not\Longleftrightarrow (P \wedge (Q \vee R)).$$

3. Das ausschließende Oder wollen wir mit $A \dot{\vee} B$ notieren. Die definierende Wahrheitstafel ist:

A	B	$A \dot{\vee} B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Nun wollen wir eine äquivalente Beschreibung mit Hilfe der üblichen logischen Symbole finden. Wir behaupten, daß

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

eine äquivalente Darstellung ist, genau so wie

$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B),$$

oder eine kürzere:

$$\neg A \iff B.$$

Beweisen wir dies für den letzten Fall mit Hilfe der Wahrheitstafel:

A	B	$A \dot{\vee} B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \iff B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w
f	w	w	w	f	w
f	f	f	w	w	f

Die Wahrheitswerte stimmen wieder überein, womit die Behauptung

$$(A \dot{\vee} B) \iff (\neg A \iff B)$$

bewiesen ist. Ganz ähnlich lässt sich die Äquivalenz mit den anderen Aussagen beweisen.

4. Auch hier stellen wir die Wahrheitstafeln auf, wir beginnen mit der Aussage

$$((P \implies R) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies Q),$$

die wir als ♣ abkürzen.

P	Q	R	$P \Longrightarrow R$	$Q \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow Q$	$(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$	♣
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

In einem Fall ist die Aussage ♣ falsch, also keine Tautologie.
Die zweite Aussage

$$((P \implies R) \wedge (Q \implies \neg R)) \implies (P \implies \neg Q)$$

kürzen wir als ♢ ab und stellen folgende Wahrheitstafel auf:

P	Q	R	$P \Longrightarrow R$	$Q \Longrightarrow \neg R$	$P \Longrightarrow \neg Q$	$(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow \neg R)$	♢
w	w	w	w	f	f	f	w
w	w	f	f	w	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	f	w	f	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Hier sehen wir, daß die Aussage ♢ eine Tautologie ist, denn sie ist stets wahr.